КВАНТОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА ТЕЙХМЮЛЛЕРА

А.Г.Сергеев

Универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ является фактором группы $\mathrm{QS}(S^1)$ квазисимметричных гомеоморфизмов единичной окружности S^1 (т.е. гомеоморфизмов S^1, продолжающихся до квазиконформных отображений единичного круга Δ) по модулю преобразований Мебиуса (т.е. дробно-линейных автоморфизмов Δ). Оно содержит, в частности, фактор $\mathcal{S}$ группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ гладких диффеоморфизмов S^1 по модулю преобразований Мебиуса. Группы $\mathrm{QS}(S^1)$ и $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ действуют естественным образом (с помощью замены переменной) на соболевском пространстве $H := H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{R})$ полудифференцируемых функций на S^1.

Задача квантования пространств $\mathcal{T}$ и $\mathcal{S}$ возникает в квантовой теории поля (более точно, в теории струн, где $\mathcal{T}$ и $\mathcal{S}$ интерпретируются как фазовые пространства этой теории). Чтобы решить задачу квантования для заданного фазового пространства, необходимо зафиксировать естественную алгебру Ли вещественнозначных функций (интепретируемых как наблюдаемые) на фазовом пространстве и построить ее неприводимое представление самосопряженными операторами, действующими в некотором комплексном гильбертовом пространстве (называемом пространством квантования).

В случае пространства $\mathcal{S}$ роль указанной алгебры играет алгебра Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ группы Ли $\mathrm{Diff}_+(S^1)$, а пространство квантования совпадает с фоковским пространством $F(H)$, ассоциированным с соболевским пространством $H = H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{R})$. Инфинитезимальный вариант $\mathrm{Diff}_+(S^1)$-действия на H порождает неприводимое представление алгебры $\mathrm{Vect}(S^1)$ на $F(H)$, задающее квантование пространства $\mathcal{S}$.

В случае универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ ситуация становится более сложной, поскольку действие группы $\mathrm{QS}(S^1)$ на $\mathcal{T}$ не является гладким. В частности, не существует классической алгебры Ли, ассоциированной с группой $\mathrm{QS}(S^1)$. Однако, мы можем построить квантовую алгебру наблюдаемых $\mathrm{Der}^q(\mathrm{QS})$, ассоциированную с $\mathrm{QS}(S^1)$. Эта алгебра порождается квантовыми дифференциалами, действующими на фоковском пространстве $F(H)$. Квантовые дифференциалы возникают из интегральных операторов $d^q h$ на H с ядрами, порождаемыми конечно-разностными производными квазисимметричных гомеоморфизмов $h \in \mathrm{QS}(S^1)$.

Математический институт им. В.А.Стеклова